# Stabilité de l'holonomie sans structure de Frobenius : cas des courbes

Daniel Caro

**Abstract**

By using Christol and Mebkhout's algebrization and finiteness theorem, we prove that in the case of smooth curves, Berthelot's strongest conjecture on the stability of holonomicity is still valid without Frobenius structure but under some non-Liouville type hypotheses.

Mathematics Subject Classification 2010: 14F30, 14F10

## Table des matières

**1 Isocristaux surconvergents sur $U_0$** **2**

**2 Foncteur daguification** **3**

**3 Conditions $(DNL\text{-}NL)$ et $(NL\text{-}NL)$** **5**

**4 Condition $(NL\text{-}NL)$ et stabilité de l'holonomie** **6**

## Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel $k$ supposé parfait, de corps des fractions $K$. Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $T_0$ un diviseur de la fibre spéciale $X_0$ de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T_0$. Berthelot a construit le faisceau sur $\mathfrak{X}$ des opérateurs différentiels de niveau fini et d'ordre infini noté $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ ; ce dernier correspondant à la tensorisation par $\mathbb{Q}$ (indiqué par l'indice $\mathbb{Q}$) du complété faible $p$-adique (indiqué par le symbole « † ») du faisceau classique $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$ des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{X}$. Enfin, en ajoutant des singularités surconvergentes le long de $T_0$, il construit le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathfrak{X}$ (voir [Ber96b] ou [Ber02]). On désigne par $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$ la catégorie des complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$-modules à cohomologie cohérente et bornée munie d'une structure de Frobenius, i.e. d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$-linéaire de la forme $F^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ avec $F^*$ désignant l'image inverse par l'endomorphisme (ou une puissance) du Frobenius absolu $X_0 \to X_0$.

Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$. Berthelot a conjecturé (voir [Ber02, 5.3.6.D)]) que le $F$-complexes $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ est holonome. Cette conjecture a été validée dans le cas où $X_0$ est une courbe propre (voir [Car06b]) puis une courbe (voir [CT08]) et enfin une variété projective(voir [Car09d]).

Nous nous intéressons ici à une extension sans structure de Frobenius de cette conjecture. D'une part, via la caractérisation homologique de l'holonomie de Virrion (voir [Vir00]), il est possible d'étendre de manière naturelle la notion d'holonomie en nous affranchissant de la structure de Frobenius. Cependant, si on ne fait aucune hypothèse supplémentaire qui permettent d'exclure les problèmes liés aux nombres de Liouville, la conjecture de Berthelot sans structure de Frobenius est fausse. En effet, lorsque $X_0$ est propre, le problème est qu'il existe des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$-cohérents dont les espaces de cohomologie $p$-adique ne sont pas de dimension finie et qui ne sont par conséquent même pas $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérents (par exemple, il suffit de considérer l'exemple donné par

Berthelot à la fin de [Ber96b]). Mais, nous disposons de théorèmes d'algébrisation et de finitude de Christol-Mebkhout pour les isocristaux surconvergents sur les courbes lisses qui satisfont à certaines hypothèses de non Liouvillité (voir l'introduction de [CM01]). Ces hypothèses de non Liouvillité sont résumés ici via l'appellation (d'origine contrôlée) « propriété $(NL\text{-}NL)$ ». Par exemple, cette propriété $(NL\text{-}NL)$ est satisfaite lorsque l'on dispose d'une structure de Frobenius.

Dans ce papier, nous établissons que la conjecture de Berthelot reste valable sans structure de Frobenius dans le cas des courbes pour les complexes se dévissant en isocristaux surconvergents satisfaisant à la propriété $(NL\text{-}NL)$ (en fait, on prouve un peu mieux via le théorème 4.6).

Ce papier se compose d'une première partie où nous faisons le lien entre les modules solubles utilisés par Christol-Mebkhout et les isocristaux surconvergents décris via les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot. Dans une seconde partie, nous étudions les propriétés (en particulier l'holonomie) de l'image du foncteur introduit par Christol-Mebkhout (que l'on appelle ici « foncteur de daguification ») dans leur théorème d'algébrisation. Nous donnons dans une troisième partie une interprétation via les $\mathcal{D}$-modules de Berthelot du théorème de finitude cohomologique de Christol et Mebkhout. Enfin, nous établissons dans une dernière partie la conjecture de Berthelot sous les conditions $(NL\text{-}NL)$ dans le cas des courbes. En particulier, nous obtenons une nouvelle preuve (on remplace ici le théorème de la réduction semi-stable de Kedlaya par ceux cités ci-dessus de Christol-Mebkhout) de la conjecture de Berthelot avec structure de Frobenius dans le cas des courbes.

## Notations

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel $k$ supposé parfait, de corps des fractions $K$. Soient $X$ un $\mathcal{V}$-schéma projectif et lisse, $Z$ un diviseur ample de $X$ et $U$ l'ouvert de $X$ complémentaire de $Z$. On suppose $U = \mathrm{Spec} A$ affine et on note $j : U \subset X$ l'inclusion canonique. On désigne par $X^\dagger$ et $U^\dagger$ les $\mathcal{V}$-schémas formels faibles lisses déduits par complétion faible $p$-adique de respectivement $X$ et $U$ (voir [Mer72]) ; par respectivement $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}$ les complétés $p$-adiques ; par $X_0$, $U_0$ et $Z_0$ les fibres spéciales respectives de $X$, $U$ et $Z$. On suppose pour simplifier que $X_0$ est de dimension pure notée $d_{X_0}$. On dispose du morphisme structural $f : \mathfrak{X} \to \mathrm{Spf}\mathcal{V}$, des morphismes d'espaces annelés $\varepsilon : X^\dagger \to X$ et $\varepsilon_U : U^\dagger \to U$. On note $j_0 : U^\dagger \subset X^\dagger$ l'inclusion canonique. Sans nuire à la généralité, nous supposerons que les $k$-schémas sont toujours réduits.

Nous utiliserons les notations usuelles sur les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques que nous ne rappelons pas ici (e.g., voir [Ber02] et le premier chapitre de [Car09b]). Le module des sections globales de faisceaux de la forme $\mathcal{D}^?_*$ avec $*$ et ? quelconques est noté $D^?_*$, e.g. $D_{U,\mathbb{Q}} := \Gamma(U, \mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}})$, $D^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}} := \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}})$, etc. De plus, pour tout faisceau $\mathcal{E}$ de groupes, on pose $\mathcal{E}_\mathbb{Q} := \mathcal{E} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$.

## 1 Isocristaux surconvergents sur $U_0$

**1.1** (Foncteur $\mathrm{sp}_+$). Soit $\mathcal{E}^\dagger$ un $\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$-cohérent. On obtient un $\mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger Z_0)_\mathbb{Q}$-module cohérent en posant

$$\mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger) := \mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger Z_0)_\mathbb{Q} \otimes_{j_{0*}\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}} j_{0*}(\mathcal{E}^\dagger).$$

Ce foncteur a été défini dans [Car06a] dans un contexte un peu plus général. Comme $Z$ est un diviseur ample de $X$, nous pouvons dans notre contexte utiliser les théorèmes de type $A$ de Noot-Huyghe (voir [NH03]) pour les $\mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger Z_0)_\mathbb{Q}$-modules cohérents. Nous redémontrons et surtout affinons (via l'isomorphisme 1.4.1 qui nous sera utile) dans notre contexte (plus facile) les résultats analogues avec structure de Frobenius de [Car07] ou sans structure de Frobenius de [Car09c].

**1.2** (Catégories d'isocristaux surconvergents sur $U_0$).

- On note $\mathrm{Isoc}^\dagger(A^\dagger_K)$ la catégorie des $A^\dagger_K$-modules cohérents munis d'une connexion surconvergente. D'après [Ber96a, 5], cette catégorie est canoniquement isomorphe à celle des isocristaux surconvergents sur $U_0$.
- On note $\mathrm{Isoc}^\dagger(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}})$ la catégorie des $\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$-cohérents tels que le module de leurs sections globales soit un élément de $\mathrm{Isoc}^\dagger(A^\dagger_K)$.

- On note $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathfrak{X}, Z_0/K)$ la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}$-cohérents. Cette catégorie est canoniquement (via les foncteurs quasi-inverses image directe et image inverse par le morphisme de spécialisation de $\mathfrak{X}$) isomorphe à celle des isocristaux surconvergents sur $U_0$.

**1.3.** Via les théorème de type $A$ :

- Les foncteurs sections globales $\Gamma(U^{\dagger}, -)$ et $\mathcal{D}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U,\mathbb{Q}}} -$ (ou $\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} -$) induisent des équivalences quasi-inverses entre $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(A^{\dagger}_K)$ et $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}})$.

- Les foncteurs sections globales $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$ et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} -$ (ou $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} -$ ou $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{A^{\dagger}_K} -$) induisent des équivalences quasi-inverses entre $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(A^{\dagger}_K)$ et $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathfrak{X}, Z_0/K)$.

**Proposition 1.4.** *Le foncteur* $\mathrm{sp}_+$ *se factorise en une équivalence de catégories de la forme* $\mathrm{sp}_+ : \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathfrak{X}, Z_0/K)$. *Pour tout* $\mathcal{E}^{\dagger} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}})$, *on dispose en outre de l'isomorphisme canonique :*

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^{\dagger})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U^{\dagger}, \mathcal{E}^{\dagger}). \tag{1.4.1}$$

*Démonstration.* Soit $\mathcal{E}^{\dagger} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}})$. D'après le premier point de 1.3, $E^{\dagger} := \Gamma(U^{\dagger}, \mathcal{E}^{\dagger}) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(A^{\dagger}_K)$ et le morphisme canonique $\mathcal{D}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}} E^{\dagger} \to \mathcal{E}^{\dagger}$ est un isomorphisme. En choisissant une présentation finie de $E^{\dagger}$, on déduit alors de [Car06a, 2.2.9] l'isomorphisme canonique $j_{0*}\mathcal{D}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}} E^{\dagger} \xrightarrow{\sim} j_{0*}(\mathcal{E}^{\dagger})$. Il en résulte l'isomorphisme

$$\mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^{\dagger}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}} E^{\dagger} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger}, \tag{1.4.2}$$

l'égalité découlant de la formule $D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} = D_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}$ vérifiée par Noot-Huyghe (voir [NH03]). D'après 1.3, $\mathcal{G} := \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathfrak{X}, Z_0/K)$. Il en résulte que le morphisme canonique $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est un isomorphisme (e.g. il suffit de le voir en dehors de $Z$ et utiliser la version analogue sans diviseur de [Ber90, 2]). On en déduit l'isomorphisme :

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger}. \tag{1.4.3}$$

D'après le deuxième point de 1.3, on bénéficie de l'isomorphisme dans $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathfrak{X}, Z_0/K)$ : $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger}$. En composant ces trois isomorphismes, on obtient l'isomorphisme qui nous permet de conclure :

$$\mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^{\dagger}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} E^{\dagger}. \tag{1.4.4}$$

□

# 2 Foncteur daguification

**2.1.** On note $\mathrm{MC}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}})$ la catégorie des $\mathcal{D}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}$-cohérents ; $\mathrm{MC}(\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}})$ la catégorie des $\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}$-cohérents. On dispose du foncteur canonique :

$$\dagger : \mathrm{MC}(\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}) \to \mathrm{MC}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}}) \tag{2.1.1}$$

défini par $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^{\dagger} := \mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}} \varepsilon^{-1}\mathcal{E}$. Ce foncteur est bien défini d'après le paragraphe 2.2 (plus précisément 2.2.2). Dans la suite de ce chapitre, on se donne $\mathcal{E} \in \mathrm{MC}(\mathcal{O}_{U^{\dagger},\mathbb{Q}})$. On note $\mathcal{E}^{\dagger}$ son image par le foncteur 2.1.1 et on pose $E := \Gamma(U, \mathcal{E})$ et $E^{\dagger} := \Gamma(U^{\dagger}, \mathcal{E}^{\dagger})$.

**2.2** (Description du foncteur †). D'après les théorèmes de type $A$ sur les $\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}$-modules ou $\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}}$-modules cohérents, on dispose des isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U,\mathbb{Q}}} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}. \tag{2.2.1}$$

Comme le morphisme canonique $\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}} \varepsilon^{-1}\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme, comme le foncteur 2.1.1 est exacte à droite, comme $E$ un $D_{U,\mathbb{Q}}$-module de présentation finie, on en déduit les isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U,\mathbb{Q}}} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\dagger. \tag{2.2.2}$$

Via le théorème de type $A$ sur les $\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$-modules cohérents, il en dérive $D_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U,\mathbb{Q}}} E \xrightarrow{\sim} E^\dagger$.

**Lemme 2.3.** *Le $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}$-module $j_*(\mathcal{E})$ est cohérent. De plus, pour tout $l \neq d_{X_0}$, $\mathcal{E}xt^l_{\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}}(j_*(\mathcal{E}), \mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}) = 0$.*

*Démonstration.* L'assertion est locale en $X$. On peut supposer $X$ affine, muni de coordonnées locales et $Z$ défini par une équation locale. D'après le théorème de type $A$ sur les $\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}}$-modules cohérents (resp. les $\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}$-modules cohérents), $E := \Gamma(U,\mathcal{E})$ est un $\Gamma(U,\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}})$-module cohérent (resp. $\Gamma(U,\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}})$-module cohérent). Or, $\Gamma(U,\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}}) = \Gamma(U_K,\mathcal{D}_{U_K})$ et $\Gamma(U,\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}) = \Gamma(U_K,\mathcal{O}_{U_K})$. On note $\mathcal{F} := \mathcal{D}_{U_K} \otimes_{\Gamma(U_K,\mathcal{D}_{U_K})} E \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_K} \otimes_{\Gamma(U_K,\mathcal{O}_{U_K})} E$ le $\mathcal{D}_{U_K}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{U_K}$-cohérent correspondant.

Comme $U_K$ est une variété sur $K$ qui est de caractéristique nulle, comme $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}_{U_K}$-module holonome (car $\mathcal{O}_{U_K}$-cohérent), alors par préservation de l'holonomie par image directe, $j_{K*}(\mathcal{F})$ est une $\mathcal{D}_{X_K}$-module holonome. Comme l'entier $d_{X_0}$ est aussi la dimension de $X_K$, d'après les théorèmes de type $A$ et $B$, il en résulte que $\Gamma(X_K, j_{K*}(\mathcal{F}))$ est un $D_{X_K}$-module cohérent et que, pour tout $l \neq d_{X_0}$, $\mathrm{Ext}^l_{D_{X_K}}(\Gamma(X_K, j_{K*}(\mathcal{F})), D_{X_K}) = 0$. Comme $D_{X,\mathbb{Q}} = D_{X_K}$ et $\Gamma(X, j_*(\mathcal{E})) = \Gamma(X_K, j_{K*}(\mathcal{F}))$, alors $\Gamma(X, j_*(\mathcal{E}))$ est $D_{X,\mathbb{Q}}$-cohérent. La quasi-cohérence de $j_*(\mathcal{E})$ nous permet alors d'en conclure que $j_*(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}$-cohérent. Via les théorèmes de type $A$ et $B$, il en résulte que $\mathcal{E}xt^l_{\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}}(j_*(\mathcal{E}), \mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ext}^l_{D_{X,\mathbb{Q}}}(\Gamma(X, j_*(\mathcal{E})), D_{X,\mathbb{Q}}) = 0$. D'où le résultat. □

**2.4.** Grâce au lemme 2.3, on obtient un $\mathcal{D}_{X^\dagger,\mathbb{Q}}$-module cohérent en posant

$$j_*^\dagger(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{X^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}} \varepsilon^{-1}(j_*\mathcal{E}). \tag{2.4.1}$$

**Définition 2.5** (Holonomie). D'après [Car09a], un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{G}$ est par définition holonome s'il est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent et si, pour tout entier $l \neq d_{X_0}$, $\mathcal{E}xt^l_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{G}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$. Lorsque l'on dispose d'une structure de Frobenius, on retrouve la définition de Berthelot.

**Lemme 2.6.** *Avec les notations de 2.4, le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{X^\dagger,\mathbb{Q}}} j_*^\dagger(\mathcal{E})$ est holonome.*

*Démonstration.* La $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérence de $\mathcal{G} := \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{X^\dagger,\mathbb{Q}}} j_*^\dagger(\mathcal{E})$ se déduit du lemme 2.3. Soit $l \neq d_{X_0}$ un entier. Pour vérifier que $\mathcal{E}xt^l_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{X^\dagger,\mathbb{Q}}} j_*^\dagger(\mathcal{E}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$, on se ramène au cas où $X$ est affine. Comme l'extension $D_{X,\mathbb{Q}} \to D^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z_0)_{\mathbb{Q}}$ est plate, cela résulte alors de 2.3. □

**Lemme 2.7.** *Avec les notations de 2.4, on dispose de l'isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents :*

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{X^\dagger,\mathbb{Q}}} j_*^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger). \tag{2.7.1}$$

*Démonstration.* De manière analogue à 2.2.2, on vérifie que le morphisme canonique $\mathcal{E}^\dagger \to \mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}}} \varepsilon^{-1}(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. Il en résulte $j_0^*(j_*^\dagger(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{D}_{U,\mathbb{Q}}} \varepsilon^{-1}(\mathcal{E}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\dagger$. Par adjonction, on obtient alors le premier morphisme $j_*^\dagger(\mathcal{E}) \to j_{0*}(\mathcal{E}^\dagger) \to \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger)$. On en déduit par extension le morphisme 2.7.1 voulu. Enfin, ce morphisme est un isomorphisme car il l'est en dehors de $Z$. □

## 3 Conditions $(DNL\text{-}NL)$ et $(NL\text{-}NL)$

Afin d'utiliser les définitions et résultats de Christol et Mebkhout, nous supposons dans cette section que $X_0$ est de dimension pure égale à 1. Pour simplifier, on suppose en outre que tous les points fermés de $Z_k$ soient $k$-rationnel. Soit $\mathcal{E}^\dagger \in \mathrm{Isoc}^\dagger(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}})$. Pour tout point fermé $x$ de $Z_k$, nous notons $\mathcal{E}^\dagger_x$ le $\mathcal{R}_K$-module associé à $\mathcal{E}^\dagger$ en $x$ ($\mathcal{E}^\dagger_x$ est une extension du module des sections sur le tube $]x[_{\mathfrak{X}}$ de $x$ dans $\mathfrak{X}$ de l'isocristal surconvergent $U_0$ associé à $\mathcal{E}^\dagger$, en effet le tube $]x[_{\mathfrak{X}}$ est isomorphe à la boule unité ouverte). Considérons les propriétés suivantes qui apparaissent dans [CM01, 5] (nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails, ainsi qu'à [CM02]) :

1. pour tout point fermé $x$ de $X_k$, $\mathcal{E}^\dagger_x$ a la propriété $(DNL)$ ;
2. pour tout point fermé $x$ de $X_k$, $\mathcal{E}^\dagger_x$ a la propriété $(NL)$ ;
3. pour tout point fermé $x$ de $X_k$, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}_K}((\mathcal{E}^\dagger_x)_{>0})$ a la propriété $(NL)$.

**Définition 3.1.**
- On dira que $\mathcal{E}^\dagger$ vérifie la propriété $(DNL\text{-}NL)$ (resp. $(NL\text{-}NL)$) si les conditions 1 et 3 (resp. 2 et 3) sont satisfaites. Rappelons que la condition 2 est plus forte que la 1. La propriété $(NL\text{-}NL)$ est donc plus forte que $(DNL\text{-}NL)$.
- On dira qu'un objet de $\mathrm{Isoc}^\dagger(\mathfrak{X}, Z_0/K)$ vérifie la propriété $(DNL\text{-}NL)$ (resp. $(NL\text{-}NL)$) si l'objet (à isomorphisme près) de $\mathrm{Isoc}^\dagger(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}})$ correspondant via l'équivalence $\mathrm{sp}_+$ de 1.4 vérifie la propriété $(DNL\text{-}NL)$ (resp. $(NL\text{-}NL)$).

**3.2** (Théorèmes d'algébrisation et de finitude de Christol-Mebkhout)**.** On dispose des théorèmes de Christol et Mebkhout (voir [CM01, 5]) :

1. Si $\mathcal{E}^\dagger$ vérifie la propriété $(DNL\text{-}NL)$ alors, quitte à faire une extension finie du corps de base $K$, $\mathcal{E}^\dagger$ est dans l'image essentielle du foncteur † de 2.1.1.
2. Si $\mathcal{E}^\dagger$ vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$ alors les $K$-espaces de cohomologie de de Rham $p$-adique
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger), \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger) \tag{3.2.1}$$
sont de dimension finie.

Traduisons à présent le théorème de finitude de Christol et Mebkhout dans le langage des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot :

**Proposition 3.3.** *Si $\mathcal{E}^\dagger$ vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$, les espaces de cohomologie de $f_+(\mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger))$ sont de dimension finie.*

*Démonstration.* 1) On a : $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(U^\dagger,-) \circ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger)$. D'après le théorème de type $B$, les termes du complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathbf{\Omega}^\bullet_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^\dagger$ sont acycliques pour le foncteur $\Gamma(U^\dagger,-)$. Il en résulte : $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{D_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(A^\dagger_{\mathbb{Q}}, E^\dagger)$.
1') De la même façon, grâce aussi à 1.4.1, on obtient le premier isomorphisme :
$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{D_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(A^\dagger_{\mathbb{Q}}, E^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}(^\dagger Z_0)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(^\dagger Z_0)_{\mathbb{Q}}, \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger)).$$

2) Comme l'extension $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est plate, comme le morphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme, on obtient alors le premier isomorphisme :
$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger)) \xrightarrow{\sim} f_+(\mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger))[-d_X].$$

3) En composant les isomorphismes de 1), 1') et 2), on obtient :
$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{U^\dagger\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}, \mathcal{E}^\dagger) \xrightarrow{\sim} f_+(\mathrm{sp}_+(\mathcal{E}^\dagger))[-d_X].$$

On en déduit la proposition grâce à 3.2.2. $\square$

# 4 Condition $(NL\text{-}NL)$ et stabilité de l'holonomie

Nous supposons dans ce chapitre que $X_0$ est de dimension pure égale à 1.

**Proposition 4.1.** *Soit $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$) tel que les espaces de cohomologie de $f_+(\mathcal{G}(^{\dagger}Z_0))$ soient de dimension finie. Alors $\mathcal{G}(^{\dagger}Z_0) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\mathcal{G}(^{\dagger}Z_0) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$).*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle de [Car06b, 2.3.2] : si deux des complexes d'un triangle distingué sont cohérents (resp. holonomes) alors le troisième l'est aussi. En appliquant le foncteur $f_+$ au triangle de localisation de $\mathcal{G}$ relative à $Z_0$, il en résulte la cohérence (resp. holonomie) de $f_+\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_0}(\mathcal{G})$. Or, via le théorème de Berthelot-Kashiwara, cette cohérence (resp. holonomie) est équivalente à celle de $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_0}(\mathcal{G})$. Grâce au triangle de localisation de $\mathcal{G}$ relative à $Z_0$, il en résulte alors celle de $\mathcal{G}$. □

**Proposition 4.2.** *Soit $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ une extension finie d'anneau de valuation discrètes complets d'inégales caractéristiques $(0,p)$. On pose $\mathfrak{X}' \times_{\mathrm{Spf}(\mathcal{V})} \mathrm{Spf}(\mathcal{V}')$ le $\mathcal{V}'$-schéma formel lisse déduit par changement de base et $\alpha : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ la projection canonique. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors $\mathcal{G}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent (resp. holonome) si et seulement si $\alpha^*(\mathcal{G})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-cohérent (resp. holonome).*

*Démonstration.* Si $\mathcal{G}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent (resp. holonome), il est alors immédiat (voir [Ber02]) que $\alpha^*(\mathcal{G})$ soit $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-cohérent (resp. holonome). Réciproquement, supposons que $\alpha^*(\mathcal{G})$ soit $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-cohérent. Comme l'assertion est locale, on se ramène au cas où $\mathfrak{X}$ est affine. Posons $G := \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{G})$ et $Z'_0 := \alpha^{-1}(Z_0)$.

0) Comme dans le cas des $\mathcal{D}$-modules en caractéristique nulle, on vérifie que le morphisme canonique $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}(^{\dagger}Z'_0)_{\mathbb{Q}} \to \alpha^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}$ est en fait un isomorphisme et que le morphisme que l'on en déduit $\alpha^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}(^{\dagger}Z'_0)_{\mathbb{Q}}$ est un morphisme d'anneaux (voir [Ber02, 2.2.2]). On obtient ainsi les extensions $D^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \to D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}(^{\dagger}Z'_0)_{\mathbb{Q}}$ et $D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to D^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$.

I.1) Comme $\mathcal{G}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}$-cohérent, par théorème de type $A$ : $\Gamma(\mathfrak{X}',\alpha^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}(^{\dagger}Z'_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}}} G$. Comme le morphisme canonique $D^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}Z_0)_{\mathbb{Q}} \to D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}(^{\dagger}Z'_0)_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme, il en résulte $\Gamma(\mathfrak{X}',\alpha^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} G$.

I.2) Or, d'après un théorème de type $A$, $\Gamma(\mathfrak{X}',\alpha^*(\mathcal{G}))$ est $D^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-cohérent. De plus, le morphisme $D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to D^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$ est fidèlement plat car il se déduit par extension du morphisme $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$. Cela implique alors que $G$ est un $D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent.

II) Soit $a$ une section globale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et notons $a'$ la section globale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ déduite. De manière analogue à I.1), comme $\mathcal{G}|\mathfrak{X}_a$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}_a}(^{\dagger}Z_0 \cap X_a)_{\mathbb{Q}}$-cohérent, on vérifie $\Gamma(\mathfrak{X}'_{a'},\alpha^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'_{a'},\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}_a,\mathbb{Q}}} \Gamma(\mathfrak{X}_a,\mathcal{G})$. Comme $\alpha^*(\mathcal{G})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-cohérent, $\Gamma(\mathfrak{X}'_{a'},\alpha^*(\mathcal{G}))$ est $D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'_{a'},\mathbb{Q}}$-cohérent et $\Gamma(\mathfrak{X}'_{a'},\alpha^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'_{a'},\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \Gamma(\mathfrak{X}',\alpha^*(\mathcal{G}))$. Via la conclusion de I.1), il en découle le premier isomorphisme : $\Gamma(\mathfrak{X}'_{a'},\alpha^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\sim} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'_{a'},\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} G \xrightarrow{\sim} D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'_{a'},\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X}_a,\mathbb{Q}}} (D^{\dagger}_{\mathfrak{X}_a,\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} G)$. Comme l'extension $D^{\dagger}_{\mathfrak{X}_a,\mathbb{Q}} \to D^{\dagger}_{\mathfrak{X}'_{a'},\mathbb{Q}}$ est fidèlement plate, il en résulte que le morphisme canonique $D^{\dagger}_{\mathfrak{X}_a,\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} G \to \Gamma(\mathfrak{X}_a,\mathcal{G})$ est un isomorphisme. D'après le théorème de type $A$ pour les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, cela implique la $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérence de $\mathcal{G}$.

III) Si $\alpha^*(\mathcal{G})$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-module holonome alors d'après l'étape précédente, $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Comme l'extension $\alpha^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$ est plate, comme $\alpha^*(\mathcal{G})$ est holonome, il en résulte que $\mathcal{G}$ est holonome. □

**Définition 4.3.** Soient $T_0$ un diviseur de $X_0$ et $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$. On dit que $\mathcal{G}$ vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$ s'il existe un diviseur $Z'$ de $X$ tel que $U' := X \setminus Z'$ soit affine, $Z'_0 := Z' \otimes_{\mathcal{V}} k \supset T_0$ et, quitte à faire une extension finie de la base, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^l\mathcal{G}(^{\dagger}Z'_0)$ soit associé à un isocristal surconvergent sur $U'_0 := U' \otimes_{\mathcal{V}} k$ qui vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$.

**Exemples 4.4.** Avec les notations de 4.3, en notant $\mathcal{Y} := \mathfrak{X} \setminus T_0$, les $F$-complexes $\mathcal{G}$ de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$ tels que $\mathcal{G}|\mathcal{Y}$ est holonome vérifient la propriété $(NL\text{-}NL)$. En effet, cela résulte de [Ber02, 5.3.5.(i)], [Car06b, 2.2.12] et du fait qu'un $F$-isocristal surconvergent sur une courbe lisse vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$. Le théorème ci-dessous est donc une extension au cas sans structure de Frobenius de la conjecture « forte » de Berthelot.

**Théorème 4.5.** *Soient $T_0$ un diviseur de $X$ et $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$ satisfaisant à la propriété $(NL\text{-}NL)$. Alors $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$.*

*Démonstration.* Grâce à 4.2, quitte à faire une extension finie de la base, on supposer qu'il existe un diviseur $Z'$ de $X$ tel que $U' := X \setminus Z'$ soit affine, $Z'_0 := Z' \otimes_{\mathcal{V}} k \supset T_0$ et, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^l\mathcal{G}({}^{\dagger}Z'_0)$ soit un isocristal surconvergent sur $U' \otimes_{\mathcal{V}} k$ qui vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$. Il découle alors de 3.3 que les espaces de cohomologie de $f_+(\mathcal{H}^l\mathcal{G}({}^{\dagger}Z'_0))$ sont de dimension finie. D'après 2.6 et 2.7.1, il existe un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome $\mathcal{G}_l$ tel que $\mathcal{H}^l\mathcal{G}({}^{\dagger}Z'_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_l({}^{\dagger}Z'_0)$. Il résulte alors de 4.1 que $\mathcal{H}^l\mathcal{G}({}^{\dagger}Z'_0)$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. On a ainsi établi que $\mathcal{G}({}^{\dagger}Z'_0) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. On peut supposer $Z'_0$ et $T_0$ réduits. Soit $Z''_0$ tel que $Z'_0$ soit la réunion disjointe de $T_0$ et $Z''_0$. Comme $\mathcal{G}({}^{\dagger}Z'_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}({}^{\dagger}Z''_0)$ (e.g. cela découle de [Car04, 2.2.14] et du fait que $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$), on déduit du triangle de localisation de $\mathcal{G}$ en $Z''_0$ que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z''_0}(\mathcal{G}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}})$. Soient $u : \mathcal{Z}'' \hookrightarrow \mathfrak{X}$ un relèvement de $Z''_0 \to \mathfrak{X}$. Comme $Z''_0 \cap T_0$ est vide, comme $u_+u^!(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z''_0}(\mathcal{G})$ est à support dans $Z''_0$, il résulte alors du théorème de Berthelot-Kashiwara que $u^!(\mathcal{G})$ est un isocristal convergent sur $Z''_0$ (comme $Z''_0$ est de dimension nulle, être un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-module cohérent sur $Z''_0$ ou un isocristal convergent sur $Z''_0$ sont deux choses équivalentes). En particulier, le module $u^!(\mathcal{G})$ est holonome (les isocristaux convergents sont toujours holonomes car leur dual comme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-module est le même que comme isocristal convergent, ce dernier n'ayant qu'un terme : voir [Car05]). Comme $u$ est une immersion fermée, le foncteur $u_+$ préserve l'holonomie (en effet, cela résulte du théorème de dualité relative et de l'exactitude de $u_+$). On en déduit que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z''_0}(\mathcal{G}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Via le triangle de localisation de $\mathcal{G}$ en $Z''_0$, il en dérive que $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$.

$\square$

**Corollaire 4.6.** *Soient $T_0$ un diviseur de $X$ et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_0)_{\mathbb{Q}}$-cohérent qui vérifie la propriété $(NL\text{-}NL)$. Alors $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.*

# Références


[Ber90] P. BERTHELOT – « Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules », $p$-adic analysis (Trento, 1989), Springer, Berlin, 1990, p. 80–124.

[Ber96a] — , « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie », Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes, 1996.

[Ber96b] — , « -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272.

[Ber02] — , « Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies $p$-adiques et applications arithmétiques, II.

[Car04] D. CARO – « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **54** (2004), no. 6, p. 1943–1996.

[Car05] — , « Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **114** (2005), p. 131–211.

[Car06a] — , « Dévissages des $F$-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en $F$-isocristaux surconvergents », *Invent. Math.* **166** (2006), no. 2, p. 397–456.

[Car06b] — , « Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compositio Mathematica* **142** (2006), no. 01, p. 169–206.

[Car07] — , « Overconvergent F-isocrystals and differential overcoherence », *Invent. Math.* **170** (2007), no. 3, p. 507–539.

[CT08] D. CARO et N. TSUZUKI – « Overholonomicity of overconvergent $F$-isocrystals over smooth varieties », preprint (2008).

[Car09a] D. CARO – « Holonomie sans structure de frobenius et critères d'holonomie », preprint (2009).

[Car09b] — , « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **42** (2009), no. 1, p. 141–192.

[Car09c] — , « Pleine fidélité sans structure de Frobenius et isocristaux partiellement surconvergents », preprint (2009).

[Car09d] — , « Stability of holonomicity over quasi-projective varieties », preprint (2009).

[CM01] G. CHRISTOL et Z. MEBKHOUT – « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles $p$-adiques. IV », *Invent. Math.* **143** (2001), no. 3, p. 629–672.

[CM02] G. CHRISTOL et Z. MEBKHOUT – « Équations différentielles $p$-adiques et coefficients $p$-adiques sur les courbes », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 125–183, Cohomologies $p$-adiques et applications arithmétiques, II.

[Mer72] D. MEREDITH – « Weak formal schemes », *Nagoya Math. J.* **45** (1972), p. 1–38.

[NH03] C. NOOT-HUYGHE – « Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout–Narváez-Macarro », *J. Algebraic Geom.* **12** (2003), no. 1, p. 147–199.

[Vir00] A. VIRRION – « Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 1, p. 1–68.

Daniel Caro
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen Campus 2
14032 Caen Cedex
France.
email : daniel.caro@math.unicaen.fr